

А.Ф. ЗАУСАЕВ, А.А. ЗАУСАЕВ

**КАТАЛОГ
ОРБИТАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ
КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИХ КОМЕТ
с 1800 по 2204 гг.**

Издание второе,
исправленное и дополненное



Машиностроение – 1
Москва
2007

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В 2005 году опубликован «Каталог орбитальной эволюции короткопериодических комет с 1900 по 2100 гг.», содержащий сведения об эволюции 164 нумерованных короткопериодических комет. Элементы орбит в этом каталоге приведены на начало года с шагом 10 лет.

В настоящем издании внесен ряд изменений и дополнений. Список рассматриваемых короткопериодических комет увеличен до 190 объектов. Расширен интервал интегрирования: эволюция орбит комет исследуется на интервале времени с 1800 по 2204 гг., причем элементы орбит приводятся на стандартные моменты времени с шагом 5100 дней.

Совместное численное интегрирование уравнений движения больших планет, Луны, Солнца и кометы проведено модифицированным методом Эверхарта с переменным шагом интегрирования, а не с постоянным, как при подготовке предыдущего издания. Это позволило более точно оценить величины и моменты минимальных сближений комет с большими планетами, Луной и Солнцем.

Расширены разделы, связанные с описанием дифференциальных уравнений движения больших планет, Луны, Солнца и кометы, а также приведено подробное изложение модифицированного метода Эверхарта, применяемого при численном интегрировании данных уравнений.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору В.П. Радченко за большую помощь при подготовке данного издания.

А.Ф. Заусаев, А.А. Заусаев

ВВЕДЕНИЕ

Кометы на протяжении всей истории исследования небесных объектов привлекали внимание астрономов и других ученых. В частности, история наблюдений кометы Галлея насчитывает более двадцати веков.

При изучении процессов эволюции кометы представляют особый интерес, так как считается, что они являют собой изначальный тип объектов Солнечной системы. Предполагается, что кометы позволят изучить первичное вещество Солнечной системы в сравнительно неизменном состоянии, поскольку они, в отличие от планет, не подверглись существенным структурным изменениям в результате действия силы тяжести, тепла и вулканической деятельности. Выдвигаются гипотезы, что ядра комет образовались еще до формирования планет, около 4,6 миллиардов лет тому назад.

Расчеты, выполненные различными исследователями комет, показывают, что диаметры кометных ядер составляют от нескольких сотен метров до нескольких десятков километров. Среди гипотез относительно состава ядер, наибольшим признанием пользуется гипотеза американского астронома Ф. Уиппла. Согласно его теории ядро является конгломератом из тугоплавких каменных частиц и замороженных летучих компонент, среди которых вода, циановодород, углекислый газ, сульфид углерода и др. Ледяные слои из замороженных газов чередуются с пылевыми слоями. При приближении кометы к Солнцу лед под действием солнечного тепла начинает испаряться, а улетающий газ образует вокруг ядра диффузную светящуюся сферу, называемую комой, а также один или несколько хвостов.

Элементы орбит комет претерпевают значительные изменения при сближениях с планетами. Наиболее заметные изменения происходят при сближении кометы с одной из планет-гигантов. Это обстоятельство необходимо учитывать при исследовании вековых изменений элементов орбит как в прошлом, так и в будущем. Данные расчеты позволяют установить, откуда кометные ядра приходят во внутренние области Солнечной системы, а также прибли-

зиться к решению проблемы происхождения кометных тел.

Проблема происхождения комет – одна из нерешенных задач астрономии. В настоящее время наметились пути ее решения. Совместными усилиями таких выдающихся астрономов, как Я.Х. Эпик, Э.Ю. Оорт, Б.Г. Марсден, З. Секанина, Э. Эверхарт, К.А. Штейнс, Е.И. Казимирчак-Полонская, была доказана реальность существования на периферии Солнечной системы (на расстоянии 50 000 – 150 000 а.е. от Солнца) неистощимого резервуара кометных ядер, которое получило название «облака Эпика-Оорта». С открытием за орбитой Нептуна пояса малых тел Уиппла-Койпера появилась возможность предположить существование в нем реликтового резервуара кометных тел Солнечной системы. Предполагая наличие двух подсистем, содержащих кометные тела, путем моделирования соударения комет удастся объяснить наличие периодических и непериодических комет в Солнечной системе. Источником поступления непериодических комет считают облако Эпика-Оорта, а периодические кометы, возможно, поступают из пояса Уиппла-Койпера. Для доказательства гипотезы о происхождении комет требуется проведение исследования эволюции их орбит с высокой степенью точности.

В небесной механике вычисление эволюции орбит комет считается одной из самых трудных задач, разрешимой только посредством трудоемкого численного интегрирования. Впервые точные расчеты орбитальной эволюции на длительных интервалах времени были произведены в 60-х годах прошлого столетия Е.И. Казимирчак-Полонской [1], Б.Г. Марсденом, Н.А. Беляевым [2], Э. Эверхартом. В настоящее время благодаря стремительному развитию средств вычислительной техники количество работ в этой области существенно возросло. Путем объединения разрозненной информации был создан ряд каталогов кометных орбит.

Первый кометный каталог был составлен Э. Галлеем в 1705 году [3]. Он включил в себя 24 параболические орбиты, и в процессе работы над каталогом была обнаружена первая короткопериодическая комета, впоследствии названная именем Галлея.

В настоящее время наиболее полным и авторитетным кометным каталогом является каталог Марсдена [4]. Он содержит элементы орбит всех известных как периодических, так и непериодических комет на моменты прохождения их через перигелий.

В 1986 г. совместными усилиями ИТА АН СССР (г. Ленинград) и Астрономическим институтом Словацкой Академии наук (г. Братислава) был создан международный каталог короткопериодических комет. Эта работа содержит сведения о процессах и явлениях, воздействующих на орбитальную эволюцию короткопериодических комет. Для всех объектов, наблюдавшихся более чем в одном появлении, интегрирование выполнено от исходных орбит назад до даты 1800 январь 25,0 и вперед до даты 2000 январь 17,0. Вычисление орбитальной эволюции проводилось квадратурным методом Коуэлла с учетом разностей до четвертого порядка. Негравитационные эффекты учтены в 31 случае [5].

Наряду с вышеуказанным каталогом Н.А. Беляева, Л. Кресака и др., содержащего энциклопедическую информацию о 81-й короткопериодической комете, наблюдавшейся более чем в одном появлении, и 47-и кометах, наблюдавшихся в одном появлении, следует отметить ранее изданные каталоги Хасегавы (1968) [6] и Карузи (1985) [7].

Более поздний каталог А. Карузи, Л. Кресака и др. содержит информацию об орбитальной эволюции короткопериодических комет на интервале времени 821,4 г. с 1585 ($JD=2300000,5$) по 2406 ($JD=2600000,5$) гг. для 109 комет, наблюдавшихся более чем в одном появлении, и 95 комет, наблюдавшихся в одном появлении. Несомненным достоинством каталога А. Карузи, Л. Кресака и др. является использование более современной, по сравнению с ранними исследованиями, теории движения больших планет DE102 при совместном численном интегрировании уравнений движения кометы с учетом возмущений от планет и Солнца. Кроме того, список исследуемых комет всего за 15 лет пополнился с 81-й, содержащейся в каталоге Н.А. Беляева, Л. Кресака и др., до 109-и в каталоге А. Карузи, Л. Кресака и др [8].

В связи с тем, что список открытых комет растет, а также появляются новые наблюдения известных комет, возникает потребность в постоянном обновлении каталогов.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ (МЕРКУРИЙ – ПЛУТОН), ЛУНЫ И КОМЕТ

Большинство фундаментальных законов окружающего нас мира описываются дифференциальными уравнениями, которые дают простое математическое представление различных явлений природы. Дифференциальные уравнения широко используются для описания движения в задачах небесной механики. Вычисление орбит связано с построением математической модели, описывающей движение небесных объектов, разработкой методов решения уравнений движения, согласованием полученных результатов с реальными наблюдениями.

При исследовании эволюции орбит комет точность полученных результатов зависит от ряда факторов, основными из которых являются: учет в математической модели основных действующих сил; точность, устойчивость, сходимость применяемого метода численного интегрирования. Дифференциальные уравнения, описывающие движение исследуемого объекта, должны учитывать действие основных возмущающих сил, несферичность больших планет, релятивистские эффекты. От того, насколько полно учитываются главные силы, действующие на исследуемое тело, зависит точность результатов, полученных применяемым методом.

Большинство предыдущих каталогов были составлены на основании решения стандартной задачи n тел, а расхождения с реальными наблюдениями устранялись путем искусственного введения так называемых негравитационных эффектов, не имеющих четких физических обоснований. Нами за основу были взяты уравнения движения с учетом гравитационных и релятивистских эффектов, используемых американскими небесными механиками Ньюхоллом, Стэндишем и Вильямсом [9] для создания банка данных координат больших планет и Луны.

При прогнозировании движения больших планет на тысячелетнем интервале времени учитывались релятивистские эффекты от взаимного влияния планет друг на друга.

Уравнения движения с учетом этих эффектов приведены в работе [9] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}}_i = & \sum_{j \neq i} \frac{m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(b+g)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{r_{ik}} - \frac{2b-1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{m_k}{r_{jk}} + g \left(\frac{u_i}{c} \right)^2 + \right. \\
 & + (1+g) \left(\frac{u_j}{c} \right)^2 - \frac{2(1+g)}{c^2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_j - \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j \left. \right\} + \\
 & + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} \{ [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \times [(2+2g)\dot{\mathbf{r}}_i - (1+2g)\dot{\mathbf{r}}_j] \} (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) + \\
 & + \frac{3+4g}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{m_j \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} + \sum_{m=1}^N \frac{m_m (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_i)}{r_{im}^3}, \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

где \mathbf{r}_i , $\dot{\mathbf{r}}_i$, $\ddot{\mathbf{r}}_i$ – координаты, скорости, ускорения в барицентрической системе координат i -го тела; $m_j = k^2 m_j$, где k^2 – гравитационная постоянная и m_j – масса j -го тела; $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$, b и g – релятивистские параметры; $b = g = 1$; $u_i = |\dot{\mathbf{r}}_i|$ и c – скорость света.

При создании точных эфемерид Луны, кроме гравитационных и релятивистских эффектов, необходимо учитывать влияние фигур Земли и Луны в математической модели. Ускорение Луны, благодаря учету зональных и тессеральных гармоник, в координатной системе $\zeta\eta\zeta$ (рис.1.1) имеет вид [9]

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = & -\frac{m}{r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{n_1} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \begin{bmatrix} (n+1)P_n(\sin j) \\ 0 \\ -\cos q P'_n(\sin j) \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{n_2} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n \begin{bmatrix} -(n+1)P_n^m(\sin j) [C_{nm} \cos ml + S_{nm} \sin ml] \\ m \sec j P_n^m(\sin j) [-C_{nm} \sin ml + S_{nm} \cos ml] \\ \cos j P_n^m(\sin j) [C_{nm} \cos ml + S_{nm} \sin ml] \end{bmatrix} \right\}, \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

где m – гравитационная постоянная; r – расстояние между центрами масс двух тел; n_1 и n_2 – максимальные степени зональных и тессеральных гармоник несферичных тел соответственно;

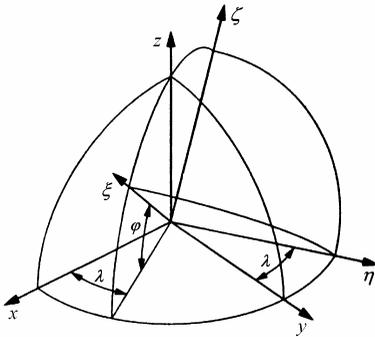


Рис.1.1 Система координат $\xi\eta\zeta$, для которой рассчитываются ускорения от несферического тела

ной массой, представленной в координатной системе $h\eta z$, где ось x направлена вовне от несферического тела к точечной массе, ось h направлена на восток (лежит в селенографической плоскости XU , перпендикулярна оси x), и, наконец, ось z направлена на север, образуя правую систему координат.

Кроме того, земные приливы оказывают на геоцентрическое ускорение Луны следующее воздействие [9]:

$$\mathbf{a}_m = -\frac{3k_2 m_m}{r_{lm}^3} \left(1 + \frac{m_m}{m_l} \right) \left(\frac{a_l}{r_{lm}} \right)^5 \begin{bmatrix} x + yd \\ y - xd \\ z \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

где k_2 – число Лява; a_l – радиус Земли; r_{lm} – геоцентрическое расстояние Луны; x, y, z – декартовы геоцентрические координаты Луны; m_m – гравитационная постоянная, умноженная на массу Луны; m_l – гравитационная постоянная, умноженная на массу Земли; d – фазовый угол.

В отличие от работ [10, 11], где проводилось совместное численное интегрирование уравнений движения больших планет, Луны, Солнца и 400 наиболее массивных астероидов, в данной работе учет влияния астероидного пояса моделируется следующим обра-

$P_n(\sin j)$ – полином Лежандра степени n ; $P_n^m(\sin j)$ – присоединенный полином Лежандра степени n и порядка m ; J_n – зональные гармоники от несферичности тела; C_{nm}, S_{nm} – коэффициенты тессеральных гармоник; j – широта притягиваемого тела в фиксированной системе координат; l – восточная долгота притягиваемого тела. Вклад в инерциальное ускорение от несферического тела возникает от взаимодействия ее собственной фигуры с внешней точеч-

зом. На орбите, принадлежащей главному поясу астероидов, задаются 50 материальных точек, при этом их массы и орбита подбираются таким образом, чтобы возмущающее действие от смоделированного объекта стремилось по величине к возмущениям от 400 реальных астероидов.

Данная модификация, содержащаяся в последней сумме уравнения (1.1), позволяет получать результаты, согласованные с наблюдениями, при многократном сокращении времени вычислений.

Система дифференциальных уравнений (1.1) описывает закон движения Солнца, девяти больших планет и Луны в барицентрической системе координат и является основной при создании современных теорий движения DE 403 [10], DE 405 [11].

2. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений для исследования движения кометы Галлея впервые применил А. Клеро в XVII в. Дальнейшее развитие эти методы получили в трудах выдающихся математиков Ж. Даламбера, Л. Эйлера, К. Гаусса и др.

В XX в. в связи с развитием электронно-вычислительной техники произошло стремительное развитие многих разделов вычислительной математики, а также численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Дж. Батчером были построены алгоритмы методов Рунге-Кутты вплоть до десятого порядка, Д.К. Куликовым были получены многошаговые алгоритмы Коуэлла 8-10-го порядков [12], Ш. Когеном и Э. Хаббартом методы Адамса-Мултона развиты до 16-го порядка, В.Ф. Мячиным и О.А. Сизовой разработаны методы тейлоровых разложений для задачи n тел [13]. В.Б. Грэггом, Р. Булиршом, Ж. Штером созданы алгоритмы рациональной экстраполяции, Э. Эверхартом получен неявный одношаговый метод типа Рунге-Кутты до 19-го порядка и т.д.

Характерной особенностью всех современных методов является высокий порядок аппроксимирующих формул, что позволяет увеличить сходимость метода и уменьшить ошибку округления за счет увеличения шага интегрирования по сравнению с методами более низкого порядка.

Одним из эффективных методов численного интегрирования уравнений движения небесных объектов является метод Эверхарта [14]. Он является одной из разновидностей методов Рунге-Кутты и относится к числу неявных одношаговых методов, что обеспечивает его сходимость и устойчивость [15].

Основным достоинством одношаговых методов является то обстоятельство, что для них разработаны надежные оценки локальной погрешности дискретизации. Кроме того, метод Эверхарта показал себя как самый эффективный по точности и быстродействию в эксперименте по исследованию алгоритмов и программ численного прогнозирования движения небесных тел, проведенном в СССР в 1986 году.

Вследствие того, что повышение порядка аппроксимирующей формулы в большинстве случаев улучшает основные свойства методов, разработка группы методов Эверхарта более высокого порядка, по сравнению с существующими, является актуальной задачей с целью создания более точного и эффективного алгоритма численного интегрирования.

Алгоритм и программа численного интегрирования методом Эверхарта ранее были разработаны до 27 порядка, однако использование этих алгоритмов свыше 19-го порядка не приводило к повышению точности вычислений. В данной главе рассматриваются разработанные авторами модифицированные алгоритмы для метода Эверхарта до 31 порядка включительно, позволяющие повысить эффективность программного продукта при увеличении порядка метода.

Рассмотрим основную идею построения метода Эверхарта на примере решения уравнения вида

$$\dot{x} = F(x, t). \quad (2.1)$$

Представим правую часть в виде временного ряда

$$\dot{x} = F(x, t) = F_1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_n t^n. \quad (2.2)$$

Интегрируя (2.2), получим выражения для определения координат и скоростей:

$$x = x_1 + \dot{x}_1 t + F_1 \frac{t^2}{2} + A_1 \frac{t^3}{6} + \dots + A_n \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, \quad (2.3)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + F_1 t + A_1 \frac{t^2}{2} + A_2 \frac{t^3}{3} + \dots + A_n \frac{t^{n+1}}{n+1}. \quad (2.4)$$

Полиномы (2.3) и (2.4) не являются рядами Тейлора, а коэффициенты A_i вычисляются из условия наилучшего приближения x и \dot{x} с помощью конечных разложений (2.3) и (2.4). Для связи A -значений с F -значениями воспользуемся вспомогательным выражением

$$F = F_1 + a_1 t + a_2 t(t - t_2) + a_3 t(t - t_2)(t - t_3) + \dots. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) усечено по времени t_n . В каждый фиксированный момент времени t_i имеем:

$$\begin{aligned}
 F_2 &= F_1 + a_1 t_2, \\
 F_3 &= F_1 + a_1 t_3 + a_2 t_3 (t_3 - t_2), \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Принимая $t_{nj} = t_n - t_j$, найдем a_i через разделенные разности:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (F_2 - F_1) / t_2, \\
 a_2 &= ((F_3 - F_1) / t_3 - a_1) / t_{32}, \\
 a_3 &= (((F_4 - F_1) / t_4 - a_1) / t_{42} - a_2) / t_{43}, \\
 a_4 &= (((((F_5 - F_1) / t_5 - a_1) / t_{52} - a_2) / t_{53} - a_3) / t_{54}, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в уравнениях (2.2) и (2.5), выразим коэффициенты A_i через a_i :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= a_1 + (-t_2)a_2 + (t_2 t_3)a_3 + \dots = c_{11}a_1 + c_{21}a_2 + c_{31}a_3 + \dots, \\
 A_2 &= a_2 + (-t_2 - t_3)a_3 + \dots = c_{22}a_2 + c_{32}a_3 + \dots, \\
 A_3 &= a_3 + \dots = c_{33}a_3 + \dots, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Коэффициенты c_{ij} определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= 1, & i &= j, \\
 c_{i1} &= -t_i c_{i-1,1}, & i &> 1, \\
 c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j}, & 1 &< j < i.
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Для алгоритма интегрирования пятого порядка имеем:

$$c_{41} = -t_2 t_3 t_4, \quad c_{42} = t_2 t_3 + t_3 t_4 + t_4 t_2, \quad c_{43} = -t_2 - t_3 - t_4, \tag{2.10}$$

где t_2, t_3, t_4 являются корнями кубического уравнения

$$(-t_2 t_3 t_4) + (t_2 t_3 + t_3 t_4 + t_4 t_2)t + (-t_2 - t_3 - t_4)t^2 + (1)t^3 = 0. \tag{2.11}$$

Таким образом, нахождение решения уравнения (2.1) сводится к нахождению узлов разбиения t_i шага h .

Вопрос нахождения узлов разбиения шага $h=[0,T]$ рассмотрим на примере алгоритма интегрирования пятого порядка.

В начальный момент времени $t_1 = 0$ известны x_1, \dot{x}_1, F . Значения x в моменты времени t_2, t_3, t_4 определяются с помощью трех предсказывающих уравнений:

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_1 t_2 + \frac{F_1 t_2^2}{2} + \left[\frac{A_1 t_2^3}{6} + \frac{A_2 t_2^4}{12} + \frac{A_3 t_2^5}{20} \right], \quad (2.12)$$

$$x_3 = x_1 + \dot{x}_1 t_3 + \frac{F_1 t_3^2}{2} + \frac{A_1 t_3^3}{6} + \left[\frac{A_2 t_3^4}{12} + \frac{A_3 t_3^5}{20} \right], \quad (2.13)$$

$$x_4 = x_1 + \dot{x}_1 t_4 + \frac{F_1 t_4^2}{2} + \frac{A_1 t_4^3}{6} + \frac{A_2 t_4^4}{12} + \left[\frac{A_3 t_4^5}{20} \right] \quad (2.14)$$

и двух исправляющих уравнений для нахождения положения и скорости на конце шага h :

$$x(T) = x_1 + \dot{x}_1 T + \frac{F_1 T^2}{2} + \frac{A_1 T^3}{6} + \frac{A_2 T^4}{12} + \frac{A_3 T^5}{20}, \quad (2.15)$$

$$\dot{x}(T) = \dot{x}_1 + F_1 T + \frac{A_1 T^2}{2} + \frac{A_2 T^3}{3} + \frac{A_3 T^4}{4}. \quad (2.16)$$

Эта схема является неявной, так как коэффициенты, стоящие в квадратных скобках (2.12) – (2.14), неизвестны при первой итерации.

Уравнения (2.12) – (2.16) обеспечивают пятый порядок точности относительно t . Можно увеличить порядок точности в вычислении x и \dot{x} до седьмого порядка путем специального выбора подшагов t_2, t_3, t_4 . С этой целью увеличим количество разбиений интервала интегрирования, добавив два дополнительных времени t_5, t_6 . Затем вычислим для t_5 и t_6 значения a_4 и a_5 , а также новые значения A'_4, A'_5 и A'_1, A'_2, A'_3 .

Из уравнения (2.15) можно найти поправки Δx , улучшающие значения координат:

$$\Delta x = \frac{(A'_1 - A_1)T^3}{6} + \frac{(A'_2 - A_2)T^4}{12} + \frac{(A'_3 - A_3)T^5}{20} + \frac{A'_4 T^6}{30} + \frac{A'_5 T^7}{42}. \quad (2.17)$$

Выражая в уравнении (2.9) c_{51}, \dots, c_{54} через c_{41}, c_{42}, c_{43} , а также полагая

$$h_2 = \frac{t_2}{T}, \quad h_3 = \frac{t_3}{T} \quad \text{и} \quad h_4 = \frac{t_4}{T}, \quad (2.18)$$

выражение (2.17) может быть записано в виде

$$\Delta x = (a_4 - t_3 a_5) T^6 \left[\frac{c'_{41}}{6} + \frac{c'_{42}}{12} + \frac{c'_{43}}{20} + \frac{1}{30} \right] + a_5 T^7 \left[\frac{c'_{41}}{12} + \frac{c'_{42}}{20} + \frac{c'_{43}}{30} + \frac{1}{42} \right].$$

Значение Δx в последнем выражении можно обратить в ноль при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} \frac{c'_{41}}{6} + \frac{c'_{42}}{12} + \frac{c'_{43}}{20} + \frac{1}{30} &= 0, \\ \frac{c'_{41}}{12} + \frac{c'_{42}}{20} + \frac{c'_{43}}{30} + \frac{1}{42} &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Проводя подобные рассуждения для скорости, приравнявая к нулю $\Delta \mathfrak{K}$, получим третье условие для определения $c'_{41}, c'_{42}, c'_{43}$. Тогда соответствующие данным разбиениям коэффициенты c'_{ij} будут определяться из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{c'_{41}}{2} + \frac{c'_{42}}{3} + \frac{c'_{43}}{4} + \frac{1}{5} = 0, \\ \frac{c'_{41}}{3} + \frac{c'_{42}}{4} + \frac{c'_{43}}{5} + \frac{1}{6} = 0, \\ \frac{c'_{41}}{4} + \frac{c'_{42}}{5} + \frac{c'_{43}}{6} + \frac{1}{7} = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Из решения этой системы

$$\begin{aligned} c'_{41} &= -\frac{4}{35} = -h_2 h_3 h_4, \\ c'_{42} &= \frac{6}{7} = h_2 h_3 + h_3 h_4 + h_2 h_4, \\ c'_{43} &= -\frac{12}{7} = -h_2 - h_3 - h_4 \end{aligned} \quad (2.21)$$

следует, что значения величин h_2, h_3, h_4 являются корнями следующего полинома третьей степени:

$$h^3 + \left(-\frac{12}{7}\right)h^2 + \left(\frac{6}{7}\right)h - \frac{4}{35} = 0. \quad (2.22)$$

которые имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{t_2}{T} = 0.212340538239\dots, \\ h_3 &= \frac{t_3}{T} = 0.590533135559\dots, \\ h_4 &= \frac{t_4}{T} = 0.91141240488\dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

Использование этих узлов позволяет получить решение уравнения (2.1) с точностью до седьмого порядка для обеих компонент x и y . Полученные по формуле (2.22) узлы разбиения h совпадают с узлами квадратурной формулы Гаусса-Радона. Область изменения h заключена в пределах $0 \leq h \leq 1$.

Таким образом, порядок метода, определяющий точность интегрирования, зависит от количества разбиений основного шага h на подшаги h_i .

В работе Э. Эверхарта [14] приведены узлы разбиения основного шага интегрирования на подшаги, обеспечивающие точность до 15 порядка включительно. Для использования метода Эверхарта более высокого порядка необходимо знать узлы разбиения отрезка $[0,1]$ на подшаги $h_i = t_i/T$ для соответствующих порядков. В табл. 2.1 приведены узлы разбиения отрезка $[0,1]$ на подшаги, вычисленные с помощью алгоритма, основанного на формулах (2.20) – (2.22), для порядков метода с 9-го по 33-ий. Здесь в шапке таблицы указан порядок метода, в столбцах – соответствующие ему узлы разбиения.

Таблица 2.1

Разбиение отрезка $[0,1]$ на подшаги Гаусса-Радона

9	11	13	15
0.139759864	0.09853508580	0.0730543286803	0.056262560536922
0.416409568	0.30453572665	0.2307661379699	0.180240691736892
0.723156986	0.56202518975	0.4413284812284	0.352624717113170
0.942895804	0.80198658213	0.6630153097188	0.547153626330555
	0.96019014295	0.8519214003315	0.734210177215411
		0.9706835728402	0.885320946839096
			0.977520613561288

Продолжение табл. 2.1

17	19	21
0.04463395528996985	0.0362578128832094609	0.030029032161486497026
0.14436625704214557	0.1180789787899987002	0.098289012209853229604
0.28682475714443052	0.2371769848149603853	0.199021078963101154785
0.45481331519657335	0.3818827653047059754	0.324055538323334892548
0.62806783541672770	0.5380295989189890651	0.463261234284339367031
0.78569152060436924	0.6903324200723621829	0.605360153114213156955
0.90867639210020604	0.8238833438370047181	0.738840323991543759673
0.98222008485263655	0.9256126102908039554	0.852888550356929759536
	0.9855875903511234514	0.938267928122851874461
		0.988082386567584403087

23	25
0.02527362039752034941993	0.0215620631658503515234611
0.08304161344740514574192	0.0710578987355889540705097
0.16917510037718142434322	0.1454474562350640695304277
0.27779671510903207234495	0.2404011104747728783810741
0.40150272023286081451917	0.3503993497227449288358693
0.53186238691041595580407	0.4690491506871822497693027
0.65999184208533481002277	0.5894549187985422453534699
0.77715939295616214324170	0.7046191157374197200278922
0.87538077485555692552065	0.8078489454701459176919704
0.94796454887281944709314	0.8931455091165233179796975
0.98998171953831959409340	0.9555535368445922664302963
	0.9914609450115725785632052

27	29
0.018610365010987535263230969	0.01622476590139167414310799742
0.061475540899268024533652269	0.05369729993969986802431196674
0.126305178693308833126712299	0.11065719118043923299356726188
0.209842971726560051768065159	0.18461026055646098074870009879
0.307898998280395393931984335	0.27232354711065713765525681593
0.415556035978656418948844903	0.36996331162951154064068014147
0.527415613995879286682017724	0.47326213866004387091045788713
0.637868602717758606993360096	0.57770534269235464626387836437
0.741376459294235453698649455	0.67872825601100140071262091552
0.832748988608440864994019577	0.77191572935069469913724751277
0.907404775300996550185631181	0.85319513231875434029195542186
0.961601861260321301310345231	0.91901450031802660505385251724
0.992635348973910610437410549	0.96649859546797916195110030221
	0.99358323920718005159554204745

31	33
0.0142694547367133927011941734111	0.064697937480224601838824354143807
0.0472995900938262916977923492531	0.097558231240761564057880651216664
0.0977132993200092011141719409873	0.089162346896612275416964865991244
0.1635690393935335166576254337113	0.145861852235048203171029366910361
0.2423352609676374968646941964594	0.216877446049896700515816767188903
0.3309848049689575332179303128583	0.297519862093824008901521015260492
0.4261108390922635511664194728915	0.385042848145347464821849460189646
0.5240576915358200350181523098574	0.476465883998021239209511221992578
0.6210613113522289838116762729681	0.568675656427129289415731046836105
0.7133939137418532178146455865041	0.658532072472853346704252185521159
0.7975072449494494270819206499923	0.742975192172166605129895171138952
0.8701689744461194350939109164064	0.819129440355379305495366761705458
0.9285870468846809709241413720609	0.884401562429212862001221635792092
0.9705177013519911908276014409011	0.936569054421349150324802715569719
0.9943593110274755861767728109331	0.973856486320809305848046500674249
	0.995002700336656240144847588087549

Однако при применении метода Эверхарта, например, к решению уравнений движения небесных объектов, увеличение порядка метода свыше 19-го не приводило к повышению точности и эффективности вычислений. Авторами показано, что главная причина заключалась в способе нахождения значений A_i .

Добиться сходимости и увеличения точности метода при повышении его порядка удалось с помощью нижеследующей модификации алгоритма.

Как известно, необходимым условием сходимости степенного ряда является стремление n -го члена ряда к нулю при $n \rightarrow \infty$. Однако при практической реализации в данном алгоритме это условие не выполняется (при $n > 19$) из-за различного рода ошибок, основную из которых дает способ вычисления коэффициентов A_i разностным методом.

Добиться сходимости временных рядов (2.3) и (2.4) удалось с помощью введения дополнительного условия, приравняв A_n к нулю, когда порядок метода выше 19-го, что влекло выполнение необходимого условия сходимости степенных рядов. С учетом сделанного допущения производится пересчет коэффициентов A_i при $i < n$, которые находятся по формулам (2.8).

Использование данного приема позволило разработать эффективный алгоритм и программное обеспечение для решения уравнений движения небесных объектов методом Эверхарта до 31-го порядка включительно. Модифицированный авторами метод Эверхарта позволяет учитывать в аппроксимирующей формуле различное количество членов в зависимости от требуемой точности.

Применение данного алгоритма к решению систем дифференциальных уравнений движения небесных объектов выявило преимущество увеличения порядка аппроксимирующих формул в алгоритме по сравнению со способами, основанными на процедуре уменьшения шага интегрирования. В частности, уменьшение шага интегрирования вдвое увеличивает время вычислений в 2 раза, а увеличение порядка метода при сохранении величины шага увеличивает время вычислений лишь в 1,2 раза.

3. КАТАЛОГ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИХ КОМЕТ

Каталоги короткопериодических комет содержат информацию о распределении комет в Солнечной системе, дают общее представление об эволюции элементов орбит с течением времени. Кроме того, в каталогах приводятся сведения о тесных сближениях с большими планетами, что важно для планирования и организации наблюдений за этими объектами. Однако в печатных вариантах каталогов элементы орбит указываются на дискретные моменты времени (с шагом), разделенные по времени несколькими десятками лет. В течение этих промежутков короткопериодические кометы могут сделать несколько оборотов, при этом информация на определенных моменты времени об элементах орбит неизвестна.

Чтобы устранить указанный недостаток, авторами разработан электронный вариант каталога короткопериодических комет. Для организации работы этого каталога был создан банк данных координат и скоростей больших планет на интервале времени 500 лет. Координаты и скорости больших планет, Луны и Солнца с шагом 100 дней в барицентрической системе координат хранятся во внешней памяти. Начальные данные координат больших планет, Луны и Солнца взяты из работы Стэндиша и др. [10]. Кроме того, авторами учитывалось влияние пояса астероидов, главным образом, на Марс и Юпитер. Координаты и скорости планет на интервале времени 500 лет были сопоставлены с данными координат и скоростей DE 405. На всем исследуемом интервале времени максимальные расхождения не превышали 1×10^{-6} а.е. Для внутренних планет были проведены сопоставления взаимных расстояний между планетой и Землей с радиолокационными наблюдениями. При создании банка данных координат и скоростей планет, Луны и Солнца использовался модифицированный метод Эверхарта 27 порядка с шагом интегрирования 6 дней.

Аналогичный банк данных координат и скоростей был получен для 190 комет на интервале времени 1800 – 2204 гг. на те же моменты, что и для больших планет. Координаты кометы на любой требуемый момент времени в интервале с 1800 по 2204 гг. определяются путем совместного интегрирования уравнений движения

больших планет, Луны, Солнца и кометы в пределах 100 дней. При создании банка данных координат комет использовался модифицированный метод Эверхарта 27-го порядка с переменным шагом интегрирования.

Созданный электронный каталог позволяет получать информацию об элементах орбит 190 короткопериодических комет на любой момент времени в интервале 1800 – 2204 гг., а также предоставляет возможность построения графиков изменения орбитальных элементов на интервале времени, задаваемом пользователем.

Предлагаемый печатный вариант каталога короткопериодических комет содержит сведения об изменении элементов орбит, сближениях с большими планетами на дискретные моменты времени с шагом 5100 дней на интервале с 1800 по 2204 гг. В данном каталоге представлены короткопериодические кометы, наблюдавшиеся более чем в одном появлении по состоянию на начало августа 2007 года.

Следует отметить, что негравитационные силы в данном исследовании не учитывались из-за их неопределенности при согласовании орбитальных параметров комет на различные даты.

4. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ

Описание таблиц

Все сведения в каталоге приводятся в едином формате (см. рисунок).

<i>Первая страница</i>		<i>Вторая страница</i>	
1	2	2	1
3		7 a 7 b 7 c 7 d	
4			
5			
6			

Структура основной части каталога

Цифры на рисунке соответствуют следующим данным:

1. Название кометы.

2. Номер кометы.

3. Краткая история исследования кометы.

Открытия, независимые открытия (в течение одного и того же появления), переоткрытия (после временной утери кометы). Указываются имя открывателя и дата открытия. Сведения о наблюдениях кометы и об утерянных появлениях даны по состоянию на начало августа 2007 года.

4. Орбитальная эволюция.

Элементы орбит с шагом 5100 дней на стандартные моменты с 1800 по 2204 гг.: M – средняя аномалия (в градусах); a – большая полуось (в астр. единицах); e – эксцентриситет; P – период (в годах); w – аргумент перигелия (в градусах); Ω – долгота восходящего узла (в градусах); i – наклонение (в градусах); L – эклиптическая долгота (в градусах); B – эклиптическая широта (в градусах). Все угловые величины отнесены к эклиптике и равноденствию эпохи 2000,0.

5. Тесные сближения с Солнцем и большими планетами.

Тесные сближения с внутренними планетами при взаимном расстоянии $\Delta \leq 0,1$ а.е. Тесные сближения с внешними планетами при взаимном расстоянии $\Delta \leq 0,5$ а.е. В тех случаях, когда данные условия удовлетворяются на некотором интервале времени на протяжении одного и того же сближения кометы с планетой или Солнцем, указывается наименьшее.

6. Начальные данные.

Начальные данные элементов орбит, использовавшиеся при численном интегрировании.

В качестве источника начальных данных для комет с номерами 1, 2, 4, 6–11, 14–17, 19, 21–34 и 34–190 использовался электронный ресурс Kazuo Kinoshita (<http://www9.ocn.ne.jp/~comet>). Начальные данные для комет с номерами 3, 5, 12, 13, 18, 20 и 35 взяты из каталога Марсдена 1999 года [4].

7. Графики изменения элементов орбит:

7a. График изменения q – перигелийного расстояния (в астр. единицах);

7b. График изменения e – эксцентриситета;

7c. График изменения i – наклонения (в градусах);

7d. График изменения p – долготы перицентра (в градусах).

Графики построены на основании данных, полученных с шагом 100 дней.